

---

SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA  
ISTITUTO MATEMATICO DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

E. LANCONELLI

STIME SUB-ELLITTICHE E METRICHE RIEMANNIANE SINGOLARI

PARTE I

17 MARZO 1983

1. In un aperto  $\Omega$  di  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , si consideri l'operatore a coefficienti reali

$$(1.1) \quad L = \sum_{i,j} \partial_i (b_{ij} \partial_j) + \sum_i b_i \partial_i + c, \quad \partial_r = \frac{\partial}{\partial x_r},$$

dove  $B = (b_{i,j})$  è una matrice simmetrica semidefinita positiva in ogni punto di  $\Omega$ .

Nello studio della regolarità locale delle soluzioni dell'equazione  $Lu = f$ , si presenta sovente il problema di determinare un numero reale positivo  $\varepsilon (\leq 1)$  tale che

$$(1.2) \quad \|u\|_\varepsilon \leq C \|u\|; \quad W_L \equiv C (\|u\|^2 + \int_\Omega \sum_{i,j} b_{i,j} \partial_i u \partial_j u \, dx)^{\frac{1}{2}},$$

per ogni  $u \in C_0^\infty(\Omega)$  con  $\text{supp } u \subseteq K \subset\subset \Omega$ ,  $C = C(K, \varepsilon) > 0$ . Qui  $\| \cdot \|$  indica la norma di  $L_2$  e  $\| \cdot \|_\varepsilon$  la norma dello spazio di Sobolev  $H^\varepsilon$ .

Nel seguito, per indicare che vale (1.2), scriveremo

$$(1.3) \quad W_L \hookrightarrow H^\varepsilon$$

Dalla disuguaglianza (1.2), se i coefficienti  $b_{i,j}$ ,  $b_i$ ,  $c$  sono  $C^\infty$ , si ricava, come noto, la ipoellitticità di  $L$  in  $\Omega$ . D'altra parte, anche nell'ipotesi di sola misurabilità per i coefficienti di  $L$ , dalla (1.2) si possono ricavare utili informazioni sulle soluzioni deboli di  $Lu = 0$  quali, ad esempio, la loro limitatezza locale.

Nel corso di questa esposizione ci limiteremo a considerare il problema (1.3) per gli operatori a coefficienti  $C^\infty$ ; in questo caso Fefferman e Phong hanno ottenuto, molto recentemente, un risultato definitivo ([2]).

Nel caso non regolare il problema è stato studiato, in una situazione particolare, in [3].

Se l'operatore  $L$  si può scrivere nella forma seguente

$$(1.4) \quad L = \sum_{j=1}^p X_j^2$$

dove  $X_j = \sum_{k=1}^n a_{k,j} \partial_k$ ,  $j = 1, \dots, p$ , sono operatori del primo ordine a coefficienti  $C^\infty$ , risulta

$$(1.5) \quad \|u; W_L\| \cong \|u\| + \sum_{j=1}^p \|X_j u\|$$

ed allora, perché valga (1.3), è sufficiente che risulti soddisfatta la seguente condizione di Hörmander ([6])

$$(H) \quad \text{rango } L(X_1, \dots, X_p)(x) = n, \quad \forall x \in \Omega,$$

dove  $L(X_1, \dots, X_p)$  indica l'algebra di Lie generata dai vettori  $X_j = (a_{1,j}, \dots, a_{n,j})^{(*)}$ ,  $j = 1, 2, \dots, p$ .

Sotto questa ipotesi si può dare una precisa stima dell'ordine dello spazio  $H^E$  contenuto in  $W_L$ . A questo scopo introduciamo alcune notazioni che utilizzeremo anche nel seguito.

Se  $I = (i_1, \dots, i_k)$  è un multi-indice a valori in  $\{1, 2, \dots, p\}$ , poniamo  $|I| = k$  ed indichiamo con  $X_I$  l'operatore differenziale

---

(\*) Converremo sempre di identificare l'operatore differenziale  $\sum_{j=1}^n a_j \partial_j$  col campo vettoriale  $(a_1, \dots, a_n)$ .

$$X_I = \begin{cases} X_{i_1} & , \text{ se } I = (i_1) \\ [X_{i_1}, X_{i_2}] & , \text{ se } I = (i_1, i_2) \\ [X_{i_1}, X_{(i_2, \dots, i_k)}] & \text{ se } I = (i_1, i_2, \dots, i_k), k \geq 2. \end{cases}$$

Diremo che  $X_I$  è un commutatore di ordine  $|I|$  dei campi  $X_1, \dots, X_p$ .

Teorema 1.6 (Rothschild-Stein 7). Risulta

$$W_L \hookrightarrow H^{1/m}$$

se,  $\forall K \subset \subset \Omega$ ,  $\forall x \in K$ , esistono  $n$  multi-indici  $I_1, \dots, I_n$  tali che

- i)  $X_{I_1}(x), \dots, X_{I_n}(x)$  sono linearmente indipendenti;
- ii)  $|I_1|, \dots, |I_n| \leq m$ .

Esempio 1.7. Consideriamo in  $\mathbb{R}^3$  l'operatore

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + (x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3})^2 \equiv X_1^2 + X_2^2.$$

Notiamo che la matrice  $B$  in questo caso è la seguente

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & X_1^2 & X_1 \\ 0 & X_1 & 1 \end{pmatrix}$$

Il più piccolo autovalore di  $B$  è  $\equiv 0$  e, quindi,  $L$  non è ellittico in nessun punto di  $\mathbb{R}^3$ .

D'altra parte  $X_{(1,2)} = [X_1, X_2] = \frac{\partial}{\partial x_2}$ ; pertanto, essendo

$$\det[X_1, X_2, X_{(1,2)}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & X_1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1,$$

$X_1, X_2, X_{(1,2)}$  sono lin. indep. in ogni punto di  $R^3$ . Essendo poi, ovviamente,  $|(1)|, |(2)|, |(1,2)| \leq 2$ , per il Teorema 1.6 risulta

$$W_L \hookrightarrow H^{1/2}$$

Se i coefficienti di  $L$  sono analitici reali e se  $L$  si può scrivere nella forma (1.4), la condizione di Hörmander (H) è anche necessaria per l'immersione  $W_L \hookrightarrow H^\epsilon$ , per un opportuno  $\epsilon > 0$  ([1]).

Una condizione necessaria e sufficiente, nel caso  $C^\infty$ , è stata fornita da Fefferman e Phong ([2]); tale caratterizzazione è di tipo geometrico e si esprime in termini delle proprietà di una distanza  $d$  associata in modo "naturale" all'operatore  $L$ .

## 2. CARATTERIZZAZIONE GEOMETRICA DELL'IMMERSIONE $W_L \hookrightarrow H^\epsilon$

Consideriamo dapprima il caso in cui  $L = \sum_{j=1}^p X_j^2$ . Supponiamo che per ogni coppia di punti  $x, y \in \Omega$  esista una curva  $\gamma_{(x,y)} = \gamma: [0,1] \rightarrow \Omega$ ,  $C^{(1)}$  a tratti e tale che

$$(2.1) \quad \gamma(0) = x, \gamma(1) = y$$

$$(2.2) \quad \dot{\gamma}(t) = \sum_{j=1}^p \lambda_j(t) X_j(\gamma(t))$$

dove  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p): [0,1] \rightarrow R^p$  è una funzione continua a tratti.

Se indichiamo con  $A$  la matrice

$$A = [X_1, \dots, X_p],$$

la (2.2) si scrive così

$$(2.2') \quad \dot{\gamma}(t) = A(\gamma(t)) \lambda(t),$$

e  $\gamma$  è soluzione del problema *di controllo*

$$\begin{cases} \dot{x} = A(x) \lambda(t) \\ x(0) = x, \quad x(1) = y \end{cases}$$

Ora, se  $0 < \epsilon < 1$ , l'immersione  $W_L \hookrightarrow H^\epsilon$  è conseguenza della disuguaglianza seguente:

$$(2.3) \quad \iint_{S \times S} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x-y|^{n+2\epsilon}} dx dy \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \left( \sum_{j=1}^p |X_j u|^2 \right) dx,$$

dove  $S$  è una sfera di centro l'origine e raggio  $r = 2 \text{ diam}(K)$ ,

$\Omega \supset K \supseteq \text{supp } u$  (non è restrittivo supporre  $0 \in K$ ).

Utilizzando la curva  $\gamma$ , si ha

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)|^2 &= \left| \int_0^1 (u(\gamma(t))) dt \right|^2 = \\ &= \left| \int_0^1 \langle \nabla u(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle dt \right|^2 = \left| \int_0^1 \langle \nabla u(\gamma(t)), A(\gamma(t)) \lambda(t) \rangle dt \right|^2 = \end{aligned}$$

$$= (\text{indicando con } A^T \text{ la trasposta di } A) =$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \int_0^1 \langle A^T(\gamma(t)) \nabla u(\gamma(t)) \cdot \lambda(t) \rangle dt \right|^2 \leq \\
&\leq \left( \int_0^1 |A^T(\gamma(t)) \nabla u(\gamma(t))|^2 dt \right) \left( \int_0^1 |\lambda(t)|^2 dt \right) = \\
&= \left( \int_0^1 \sum_{j=1}^p |X_j(\gamma(t)) u(\gamma(t))|^2 dt \right) \left( \int_0^1 |\lambda(t)|^2 dt \right).
\end{aligned}$$

Posto

$$(2.4) \quad I_2(\gamma) = \left( \int_0^1 |\lambda(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

risulta

$$\iint_{S \times S} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^{n+2\epsilon}} dx dy \leq \int_0^1 dt \iint_{S \times S} \sum_{j=1}^p |X_j u(\gamma(t))| \frac{I_2^2(\gamma) dx dy}{|x-y|^{n+2\epsilon}}$$

Supponiamo ora che per ogni fissato  $(t,x) \in [0,1] \times S$ ,

$z = \gamma(t) \equiv \gamma_{(x,y)}(t)$  sia un cambiamento di variabile con  $|\partial z / \partial y| \leq C$ ,  $C$  indipendente da  $(t,x)$ . Allora:

$$\begin{aligned}
(2.5) \quad &\iint_{S \times S} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x-y|^{n+2\epsilon}} dx dy \leq \int_0^1 dt \int_{R^n} \sum_{j=1}^p |X_j u(z)|^2 dz \cdot \\
&\cdot \int_S \frac{|I_2^2(\gamma_{x,y}(z))|}{|x-y(z)|^{n+2\epsilon}} dx
\end{aligned}$$

Da questa disuguaglianza si ottiene la (2.3) se

$$(2.6) \quad I_2(\gamma_{(x,y)}) \leq C|x-y|^\sigma$$

per una opportuna  $\sigma > \epsilon$ .

Per ottimizzare la stima (2.5) risulta quindi conveniente scegliere, fra tutte le curve  $\gamma$  verificanti (2.1) e (2.2) (ammesso che ve ne siano sempre) "quella che minimizza" il funzionale  $I_2(\gamma)$ .

Se chiamiamo  $d_2(x,y)$  tale "minimo" e se risulta, per ogni compatto  $K$  di  $\Omega$ , e per ogni  $\hat{x}, y \in K$ ,

$$d_2(x,y) \leq C|x - y|^\sigma, \quad C = C(K),$$

con  $\sigma > 0$  indipendente da  $K$ , allora, per quanto precede, risulta

$$W_L \subset H^\varepsilon, \quad \forall \varepsilon < \sigma$$

Appare dunque chiaro che il problema della immersione (1.3) è legato alla *controllabilità* e alle proprietà dei *controlli* del sistema

$$(2.7) \quad \begin{cases} \dot{x} = A(x) \lambda(t) \\ x(0) = x, \quad x(1) = y \end{cases}$$

Nel seguito supporremo pertanto che il sistema (2.7) sia *controllabile*; esista cioè,  $\forall x, y \in \Omega$ , una funzione  $\lambda: [0,1] \rightarrow R^p$ , continua a tratti e limitata (un *controllo*) tale che il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = A(x) \lambda(t) \\ x(0) = x, \quad x(1) = y \end{cases}$$

ammetta una soluzione  $\lambda: [0,1] \rightarrow \Omega$ , continua e  $C^{(1)}$  a tratti. Chiameremo *L-ammissibile* ogni curva  $\gamma$  del tipo ora detto e porremo

$$I_2(\gamma) = \left( \int_0^1 |\dot{\lambda}(t)|^2 dt \right)^{1/2}, \quad I_1(\gamma) = \int_0^1 |\lambda(t)| dt.$$



Definizione 2.8. Per ogni  $x, y \in \Omega$  poniamo

$$d_k(x, y) = \inf\{I_k(\gamma) / \gamma \text{ L-amm.}, \gamma(0) = x, \gamma(1) = y\}, \quad k = 1, 2.$$

Ovviamente, per la disuguaglianza di Hölder,  $I_1(\gamma) \leq I_2(\gamma)$  e, quindi,  $d_1 \leq d_2$ .

Proveremo fra poco che  $d_1 = d_2$ . A questo scopo introduciamo la seguente distanza su  $\Omega$ .

Definizione 2.9. Sia  $\lambda: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^p$  una funzione continua a tratti e tale che  $|\lambda(t)| \leq 1 \quad \forall t \in [0, T]$ . Sia  $\gamma: [0, T] \rightarrow \Omega$  una curva continua e  $C^{(1)}$  a tratti tale che  $\dot{\gamma}(t) = A(\gamma(t)) \lambda(t)$ . Diremo allora che  $\gamma$  è *sub-unitaria* per  $L$ , e porremo  $l(\gamma) = T$ . Per ogni  $x, y \in \Omega$  definiamo

$$d(x, y) = \inf\{l(\gamma) / \gamma \text{ sub-unitaria}, \gamma(0) = x, \gamma(l(\gamma)) = y\}.$$

Si riconosce subito che  $d$  è una distanza su  $\Omega$ . Inoltre, se  $\gamma: [0, T] \rightarrow \Omega$  è sub-unitaria per  $L$  e  $\dot{\gamma}(t) = A(\gamma(t)) \lambda(t)$ , allora  $\tilde{\gamma}: [0, 1] \rightarrow \Omega$ ,  $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(Tt)$  è  $L$ -ammissibile e

$$\dot{\tilde{\gamma}}(t) = A(\tilde{\gamma}(t)) (\lambda(Tt) T).$$

Pertanto, per  $k = 1, 2$ ,

$$I_k(\tilde{\gamma}) = \left( \int_0^1 |\lambda(Tt)|^k T^k dt \right)^{1/k} \leq T = l(\gamma).$$

Ciò prova che è  $d_k \leq d$  per  $k = 1, 2$ .

Dalla Proposizione seguente si dedurrà, allora,  $d_1 = d_2 = d$ .

Proposizione 2.10. Per ogni  $x, y \in \Omega$  risulta

$$d(x,y) \leq d_1(x,y)$$

Dimostrazione. Fissato  $\varepsilon > 0$  ad arbitrio sia  $\gamma: [0,1] \rightarrow \Omega$  una curva L-ammissibile tale che  $I_1(\gamma) < d_1(x,y) + \varepsilon$ . Sarà pertanto  $\dot{\gamma}(t) = A(\gamma(t)) \lambda(t)$ , con  $\lambda: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^p$  limitata e continua a tratti, tale che

$$\int_0^1 |\lambda(t)| dt = I_1(\gamma) < d_1(x,y) + \varepsilon.$$

Sia ora  $\sigma = \{t_0, t_1, \dots, t_q\}$  una scomposizione di  $[0,1]$  tale che, posto  $\mu_k = \sup_{[t_{k-1}, t_k]} |\lambda|$ ,  $k = 1, 2, \dots, q$ , si abbia

$$\sum_{k=1}^q \mu_k (t_k - t_{k-1}) < \int_0^1 |\lambda(t)| dt + \varepsilon.$$

Per ogni  $k = 1, \dots, q$  poniamo ora

$$\gamma_k: [0, \mu_k(t_k - t_{k-1})] \rightarrow \Omega, \gamma_k(t) = \gamma(t_{k-1} + t/\mu_k).$$

Si riconosce immediatamente che  $\gamma_k$  è una curva sub-unitaria per L che connette  $\gamma(t_{k-1})$  e  $\gamma(t_k)$ . Allora

$$\begin{aligned} d(x,y) &\leq \sum_{k=1}^q d(\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k)) \leq \sum_{k=1}^q l(\gamma_k) = \\ &= \sum_{k=1}^q \mu_k (t_k - t_{k-1}) < d_1(x,y) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

La Proposizione seguente suggerirà il modo di definire la distanza  $d$  anche nel caso in cui l'operatore L non si scrive nella forma

$$\sum_{j=1}^p x_j^2.$$

Proposizione 2.11. Supponiamo che il rango della matrice  $A = [X_1, \dots, X_p]$  sia costante ed uguale a  $\min(p, n)$  in ogni punto di  $\Omega$ . Una curva  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \Omega$ , continua e  $C^{(1)}$  a tratti, è L-ammissibile se, e solo se, esiste  $\mu: [0, 1] \rightarrow R^n$ , continua a tratti e tale che

$$(2.11a) \quad \dot{\gamma}(t) = (A A^T)^{-1} (\gamma(t)) \mu(t)$$

Si ha poi

$$(2.11b) \quad I_1(\gamma) = \int_0^1 |A^T(\gamma(t)) \mu(t)| dt .$$

Una curva  $\gamma: [0, T] \rightarrow \Omega$  è sub-unitaria per L se vale (2.11a) e  $|A^T(\gamma(t)) \mu(t)| \leq 1 \quad \forall t \in [0, T]$ .

Dimostrazione. Se  $\lambda: [0, 1] \rightarrow R^n$  ( $\lambda: [0, T] \rightarrow R^n$ ) è continua a tratti e  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \Omega$  ( $\gamma: [0, T] \rightarrow \Omega$ ) è continua, esiste una funzione continua a tratti  $\mu$ , avente lo stesso dominio di  $\lambda$ , tale che

$$A(\gamma(t)) \lambda(t) = (A A^T)^{-1} (\gamma(t)) \mu(t)$$

per ogni t. Ciò prova la Proposizione 2.11.

Osservazione 2.12. Se  $L = \sum_{j=1}^p X_j^2 \equiv \sum_{i,k} a_{i,k}(b_{i,k}) + \dots$ , risulta  $A A^T = (b_{i,k}) \equiv B$ . Pertanto (2.11a) e (2.11b) si scrivono, rispettivamente, così

$$(2.12a) \quad \dot{\gamma}(t) = B(\gamma(t)) \mu(t) ;$$

$$(2.12b) \quad I_1(\gamma) = \int_0^1 \langle B(\gamma(t)) \mu(t), \mu(t) \rangle^{1/2} dt ;$$

infine, la condizione  $|A^T(\gamma(t)) \mu(t)| \leq 1$  diventa  $\langle B(\gamma(t)) \mu(t), \mu(t) \rangle \leq 1$ .

Osservazione 2.13. Se la matrice  $B$  è invertibile in ogni punto di  $\Omega$  (cioè se  $L$  è ellittico in  $\Omega$ ), ogni curva  $\gamma \in C^1$  a tratti e contenuta in  $\Omega$  è  $L$ -ammissibile in quanto basta porre  $\mu(t) = B^{-1}(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t)$  per avere  $\dot{\gamma}(t) = B(\gamma(t)) \mu(t)$ . In questo caso

$$I_1(\gamma) = \int_0^1 \langle \dot{\gamma}(t), B^{-1}(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) \rangle^{1/2} dt ;$$

quindi  $I_1(\gamma)$  è la *lunghezza* di  $\gamma$  nella metrica riemanniana  $d_r$  generata dalla forma bilineare

$$g(x; \xi, \eta) = \langle B^{-1}(x) \xi, \eta \rangle .$$

Di conseguenza  $d = d_r$ .

Diamo ora la definizione di  $d$  nel caso generale.

Definizione 2.14. Sia  $L = \sum_{i,k} \partial_i (b_{ik} \partial_k) + \dots$  l'operatore

(1.1). Un vettore  $\xi \in \mathbb{R}^n$  si dice sub-unitario per  $L$  in  $X$  se risulta  $\xi = B(x) \mu$  con  $\langle B(x) \mu, \mu \rangle \leq 1$ .

Una curva  $\gamma: [0, T] \rightarrow \Omega$  continua e  $C^1$  a tratti si dice sub-unitaria per  $L$  se  $\dot{\gamma}(t)$  è sub-unitario in  $\gamma(t)$ , q.d. su  $[0, T]$ .

Infine, per ogni  $x, y \in \Omega$ , poniamo

$$d(x, y) = \inf \{ T / \exists \gamma: [0, T] \rightarrow \Omega, \text{ sub-unitaria per } L, \\ \gamma(0) = x, \gamma(T) = y \}$$

Vale allora il seguente Teorema di Fefferman e Phong [2]

Teorema 2.15. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

$$1) W_L \subset H^\epsilon$$

$$2) \forall K \subset \subset \Omega \exists C = C(K, \epsilon): d(x, y) \leq C|x - y|^\epsilon, \quad \forall x, y \in K.$$

$$\text{Se } L = \sum_{j=1}^p X_j^2 \text{ e se } \text{rango } L(X_1, \dots, X_p) = n \text{ in ogni punto di}$$

$\Omega$ , la distanza  $d$  si può valutare in modo abbastanza preciso. Infatti:

Teorema 2.16. Se esiste un intero positivo  $m$  tale che lo spazio vettoriale generato da

$$\{X_I(x)/|I| \leq m\}$$

ha dimensione  $n$  in ogni punto di  $\Omega$ , allora, per ogni compatto  $K \subset \subset \Omega$  esiste  $C = C(K)$  tale che

$$d(x, y) \leq C|x - y|^{1/m}, \quad \forall x, y \in K.$$

Dimostrazione. Se  $X \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$ ,  $x \in \Omega$  e  $t \in \mathbb{R}$ , indichiamo con  $e^{tX}(y)$  il valore della soluzione al tempo  $t$  del problema di Cauchy  $\dot{x} = X(x)$ ,  $x(0) = y$ . La funzione  $e^{tX}$  è, quindi, una traslazione di ampiezza  $t$  lungo le traiettorie di  $X$ . Risulta

$$(2.16a) \quad e^{tX}(x) = x + tX(x) + t^2 O(1),$$

dove, qui e nel seguito,  $O(1)$  indica una funzione limitata sui compatti di  $]-\delta, \delta[ \times \Omega$ ,  $\delta > 0$  opportuno. Sia ora  $J = (Y_1, \dots, Y_r)$  una  $r$ -pla ordinata di vettori  $Y_j \in \{\pm X_1, \dots, \pm X_p\}$ ,  $j = 1, \dots, r$ ; poniamo, se  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$E(J, t) = e^{tY_r} \circ \dots \circ e^{tY_1}$$

Si noti che  $d(x, E(J, t)(x)) \leq r|t|$ , in quanto, posto  $x_0 = x$  e  $x_k = e^{t Y_r}(x_{k-1})$ ,  $k = 1, \dots, r$ , risulta  $d(x_{k-1}, x_k) \leq |t|$  e, quindi,

$$d(x, E(J, t)(x)) = d(x_0, x_r) \leq \sum_{k=1}^r d(x_{k-1}, x_k) \leq r|t|$$

Se  $X_I$  è un commutatore dei campi  $X_1, \dots, X_p$ , di lunghezza  $|I| = m$ , utilizzando la formula di Campbell-Haurdorf si dimostra (cfr. [6], pag. 163) l'esistenza di una  $r$ -pla  $J$  tale che

$$(2.16b) \quad \exp(t^m X_I) = E(J, t) + H(t)$$

dove  $H(t)(x) = O(1) t^{m+1}$ .

Allora

$$(2.16c) \quad \exp(\tau X_I) = \begin{cases} E(J, \tau^{1/m}) + H(\tau^{1/m}), & \text{se } \tau \geq 0, \\ E(J^-, (-\tau)^{1/m}) + H^-((- \tau)^{1/m}), & \text{se } \tau < 0, \end{cases}$$

dove  $J^-$  è una  $r$ -pla tale che

$$E(J^-, t) + H^-(t) = \exp(t^m (-X_I))$$

con  $H^-(t) = O(1) t^{m+1}$ ; si noti che  $(-X_I)$  è un commutatore di lunghezza  $m$ .  
Poniamo

$$E_I(\tau) = \begin{cases} E(J, \tau^{1/m}), & \text{se } \tau \geq 0 \\ E(J^-, (-\tau)^{1/m}), & \text{se } \tau < 0. \end{cases}$$

Proviamo che la funzione  $(\tau, x) \rightarrow E_I(\tau)(x)$  è di classe  $C^{(1)}$ .

E' sufficiente provare la continuità di  $\partial E_I(\tau)(x)/\partial\tau$ . Se  $\tau > 0$  si ha

$$\begin{aligned} \frac{E_I(\tau+h)(x) - E_I(x)}{h} &= (\tau+h = t^m, \tau = t_0^m) = \\ &= \frac{E(J,t) - E(J,t_0)}{t^m - t_0^m} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \partial E(J,t_0)/\partial t/m t_0^{m-1} = \\ &= (\text{per (2.16b)}) = X_I(\exp(t_0^m X_I)(x)) + \frac{\partial}{\partial t} H(t_0)(x)/m t_0^{m-1} = \\ &= X_I(x) + \tau^{1/m} o(1) . \end{aligned}$$

Analogamente, per  $\tau < 0$ , si ricava

$$\partial E_I(\tau)(x)/\partial\tau = X_I(x) + |\tau|^{1/m} o(1)$$

ciò prova la regolarità di  $E_I$ .

Siano ora  $X_{I_1}, \dots, X_{I_n}$   $n$  commutatori di  $X_1, \dots, X_p$ , linearmente indipendenti in un fissato punto  $x_0 \in \Omega$ . Sia  $m_j = |I_j| \leq m$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

Consideriamo la funzione  $F$  definita in un intorno dello zero di  $\mathbb{R}^n$  nella maniera seguente

$$F(t) = F(t_1, \dots, t_n) = E_{I_n}(t_n) \circ \dots \circ E_{I_1}(t_1)(x_0) .$$

Per quanto precede  $F$  è di classe  $C^{(1)}$ . Inoltre, poiché  $E_I(\tau)(x) = x + \tau X_I(x) + |\tau|^{(m+1)/m} o(1)$ , se  $|I| = m$ , si ha

$$F(t) = x_0 + \sum_{j=1}^n X_{I_j}(x_0) t_j + |t|^{1+1/m} o(1)$$

Pertanto

$$\frac{\partial F}{\partial t}(o) = [X_{I_1}(x_0), \dots, X_{I_n}(x_0)]$$

è invertibile e, quindi, per il Teorema di invertibilità locale, esistono  $\rho > 0$ ,  $\sigma > 0$ ,  $M > 0$  tali che  $F(\{|t| < \rho\}) \supseteq \{|x - x_0| < \sigma\}$  e

$$|F(t) - F(o)| \geq M|t|, \quad \forall t \in \mathbb{R}^n, |t| < \rho.$$

Sia ora  $x \in \{|x - x_0| < \sigma\}$  e sia  $t \in \mathbb{R}^n$ ,  $|t| < \rho$ , tale che  $F(t) = x$ .

Posto  $x_k = E_{I_k}(t_k)(x_{k-1})$  per  $k = 1, 2, \dots, n$ , si ha

$$\begin{aligned} d(x_0, x) &\leq \sum_{k=1}^n d(x_{k-1}, x_k) = \sum_{k=1}^n d(x_{k-1}, E_{I_k}(t_k)(x_{k-1})) \leq \\ &\leq C_1 \sum_{k=1}^n |t_k|^{1/m_k} \leq C_2 |t|^{1/m} \leq \\ &\leq (C_2/M^{1/m}) |F(t) - F(o)|^{1/m} = C_3 |x - x_0|^{1/m} \end{aligned}$$

Poiché le costanti  $\rho$ ,  $\sigma$  ed  $M$  si possono scegliere dipendenti solo dal compatto  $K \ni x_0$ ,  $K \subset \Omega$ , ciò prova l'asserto.

Il Teorema di Rothschild e Stein è, quindi, una conseguenza del Teorema di Fefferman e Phong e del Teorema 2.15. Dalla dimostrazione da noi fornita di questo ultimo, si deduce il Teorema di connettività di Chow-Hermann.

Corollario 2.16. Sia  $\Omega$  un aperto connesso di  $\mathbb{R}^n$  e siano  $X_1, \dots, X_p \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$  tali che  $\text{rango } L(X_1, \dots, X_p) = n$  in ogni punto di  $\Omega$ . Allora, per ogni coppia di punti  $x, y \in \Omega$ , esiste una poligonale continua  $\gamma \subset \Omega$  che connette  $x$  ed  $y$ , ciascun lato della quale è curva integrale di uno dei campi  $\pm X_1, \dots, \pm X_p$ .



BIBLIOGRAFIA

- [1] DERRIDJ M.: Sur une classe d'opérateurs différentiels elliptiques à coefficients analytiques, Séminaire Goulaonic-Schwartz 1970/71, Exposé n. 12.
- [2] FEFFERMAN C. e PHONG D.H.: Subelliptic Eigenvalue Problems, Conference on Harmonic Analysis (Chicago, 1981). Wadsworth international mathematics series (1983) 590-606.
- [3] FRANCHI B. e LANCONELLI E.: Une métrique associée à une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés, in corso di stampa su Rend. Sem. Mat. Univ. e Politec. Torino.
- [4] HERMANN R.: Differential Geometry and the Calculus of Variations, Academic Press, New York and London (1968).
- [5] HERMES H. e LASALLE J.P.: Functional Analysis and Time Optimal Control, Academic Press, New York and London (1969).
- [6] HÖRMANDER L.: Hypoelliptic Second-Order Differential Equations, Acta Math., 119 (1967), 147-171.
- [7] ROTHSCHILD L. - STEIN E.M.: Hypoelliptic Differential Operators and nilpotent groups, Acta Math. 137 (1976), 247-320.
- [8] SUSSMANN H.: Orbits of Families of Vector Fields and Integrability of Distributions, Trans. Amer. Math. Soc., 180 (1979), 171-188.